

Estimación¹

Robert E. Reys

Profesor de Educación Matemática en la Universidad de
Missouri, Columbia

La estimación y el razonamiento matemático van de la mano. Ambos son complejos y cada uno involucra muchos procesos diferentes. Siento que el adiestramiento en la estimación provee un contexto natural, dentro del cual no sólo se pueden desarrollar sino también practicar muchas habilidades importantes para razonar.

¿Cuáles son estas habilidades importantes para razonar?

Un examen de los artículos de cualquier revista de educación matemática muestra que lo que constituye el razonamiento matemático está sujeto a muchas interpretaciones diferentes. En lugar de tratar de formular una definición explícita de razonamiento matemático, consideramos algunas características suyas. Por ejemplo, una persona, al razonar matemáticamente:

1. estudia un problema y decide qué tipo de respuesta se requiere;
2. usa su flexibilidad mental al trabajar con diferentes clases de números;
3. selecciona las estrategias apropiadas;
4. reconoce que existen varias soluciones y no tiene temor de abandonar una estrategia en favor de otra; y
5. revisa si los resultados son razonables.

Si estos pasos parecen los apropiados para resolver problemas, es porque lo son. El resolver problemas y el razonamiento matemático son inseparables. Aun así, esta lista no es exhaustiva, ni son las características mutuamente excluyentes. Sin embargo, bosquejan algunos procesos clave del razonar que pueden ser desarrollados por la enseñanza de la estimación. El resto de este artículo abarca las habilidades y provee unos cuantos ejem-

¹ Tomado de *Matemáticas y enseñanza*.
(1), vol. 1. Revista de la Sociedad Matemática Mexicana, México, 1986.

plos específicos de cómo la estimación puede ayudar a afianzar mejor las habilidades.

ACTIVIDAD 1

Leer cada encabezado periodístico.

Decir si las cifras representan

datos exactos o estimaciones.



Observemos

Muchas veces necesitamos una respuesta exacta a un problema; sin embargo, la mayoría de las veces una estimación servirá igual de bien. Ya que las estimaciones son a menudo más fáciles y más rápidas de obtener, debemos usarlas. Los niños necesitan darse cuenta que el mundo actual es bombardeado con datos numéricos, algunos exactos y otros estimaciones. Es útil, y a menudo muy importante, saber distinguir cuál es cuál. Los encabezados periodísticos mostrados en la Actividad 1 pueden usarse para ayudar a los alumnos a distinguir mejor entre estimaciones y respuestas exactas. Al discutirse estos encabezados, no estarán de acuerdo en cómo clasificar cada uno de ellos, pero esta experiencia promoverá que los niños cuestionen y defiendan, o al menos, expliquen sus interpretaciones.

Por supuesto que muchas veces se necesitan respuestas exactas (v. g., La estación está en el 102 de FM. ¿De cuánto es tu recibo de luz este mes?) y muchas veces se reportarán estimaciones (v. g., La estación está por el 100 de FM. ¿Como de cuánto será tu cuenta de luz este mes?). Preguntas como las de la Actividad 2 dan oportunidad de mejorar la decisión de si se necesitan

respuestas exactas o estimaciones. Observar y decidir el tipo de respuesta necesaria en un problema es una parte importante del razonamiento matemático. No sólo promueve que los alumnos se den cuenta del poder y la utilidad de la estimación, sino que a menudo también nos muestra la dirección para la solución del problema.

ACTIVIDAD 2



- ¿Es suficiente la estimación cuando:
- el contador calcula cuánto dinero se sacara de la venta de boletos?
 - el periódico reporta cuanta gente asistió al juego?

CUENTA POR UNA CENA	
Comida	\$ 1 362.50
impuesto	?
Total	?

- ¿Es suficiente una estimación cuando:
- la mesera calcula el 15% de impuesto?
 - la mesera encuentra el total?
 - el cliente calcula el 15% de propina?
 - el cliente revisa la cuenta?

Flexibilidad mental con los números

Reconocer qué tipo de respuesta se necesita es el primer paso hacia una flexibilidad mental, y un buen sentido de los números es el próximo. Consideremos, por ejemplo, el siguiente problema:

Estime: $\frac{7}{8} + 1\frac{12}{13}$

Los estudiantes con un buen sentido de los números reconocerán que estas fracciones son cercanas a 1 y a 2 respectivamente. Tal razonamiento convierte una solución por algoritmo potencialmente larga y engorrosa, en una respuesta rápida: "casi 3". Los estudiantes brillantes frecuentemente exhiben este tipo de razonamiento ellos mismos, pero la mayoría de los alumnos necesitan una enseñanza cuidadosa para desarrollar un sentido de los números y una flexibilidad. La Actividad 3 muestra una manera en la cual la flexibilidad puede ser reforzada.

Es esencial que la enseñanza sea diseñada para ofrecer, en conjunto, actividades que aumenten la flexibilidad de los alumnos con los números. Estas actividades incluyen relacionar diferentes números, tal como traducir "Venta: 35% de descuento" a "descuento de $\frac{1}{3}$ ", o reconocer que $\frac{1}{10}$ no sólo esta cerca

sino que es mucho más fácil de usar al obtener una estimación. La flexibilidad mental también es esencial al estimar y representa un elemento importante del razonamiento matemático.

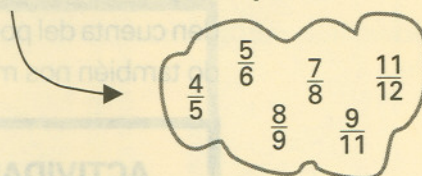
Seleccionemos una estrategia

Muchas estrategias diferentes son útiles para obtener estimaciones. Aunque el redondeo ha sido la estrategia estimativa predominante en la enseñanza, otras estrategias poderosas y útiles están disponibles, tales como extremos, promedios y números compatibles (Reys y Reys, 1983; Trafton, 1976). Cada una de estas estrategias se ilustra en la Figura 1.

La investigación ha demostrado que cuando estas y otras estrategias son enseñadas, el desempeño de los alumnos aumenta significativamente (Reys *et al.* 1984). Es esencial que una variedad de estrategias para estimar se enseñe sistemáticamente dentro de los programas de matemáticas. La investigación ha demostrado que a menos que las estrategias específicas sean enseñadas, pocos estudiantes desarrollarán éstas por sí mismos. Al aumentar su repertorio de estrategias estimativas a través de la enseñanza y la práctica, los estudiantes se dan más y más cuenta de las opciones disponibles. Un análisis de las condiciones del problema, junto con las propias preferencias de los alumnos y estilos, conducirá a un proceso de resolución que ligue una estrategia a un problema. Estos procesos analíticos, de juicio y de toma de decisiones, están en el corazón del razonamiento matemático.

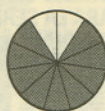
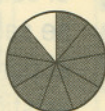
ACTIVIDAD 3

Estas fracciones son menores que 1



Supón que se suman dos de ellas.

$$\frac{8}{9} + \frac{9}{11}$$



La suma debe ser... _____

menos que $\frac{2}{2}$ exactamente $\frac{2}{2}$ más que $\frac{2}{2}$

¿Juntos son menos que 2 pasteles?

Piensa por qué

Supón que se suman tres de estas fracciones.
La suma debe ser... _____

Prueba estas:

1.

$$\frac{7}{8} + \frac{4}{5}$$

menos que

más que

2.

$$\frac{1}{3} + \frac{7}{15}$$

menos que

más que

3.

$$\frac{5}{9} + \frac{7}{13} + \frac{2}{3}$$

menos que

más que

4.

$$\frac{4}{5} + \frac{11}{12} + \frac{8}{9}$$

menos que

más que

FIGURA 1

EXTREMOS

Estime el total de esta cuenta de abarrotes

arroz	N\$419.00
huevo	86.00
leche	139.00
sal	29.00
azúcar	214.00
impuesto	23.00
	<hr/>
	10.00

1

4 + 1 + 2
Extremos

Las centenas suman \$700.00

2

Ajuste

Las docenas son como \$200.00

19 y 86 son más que 100. El resto también suma más que 100.

3

Estimación

\$700.00 + 200.00 = \$900.00

Promediar

Estime la asistencia total

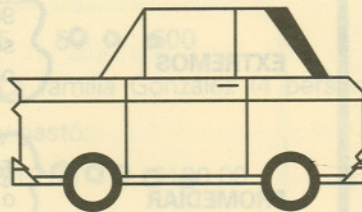
lunes	72,250	martes	63,891	miércoles	67,490
jueves	73,180	viernes	74,918	sábado	68,490

Las cifras se aglomeran alrededor de 70 000, entonces 70 000 personas asistieron cada día. $6 \times 70\,000 = 420\,000$

Estimación al promediar: 420 000

Números compatibles

Estime los pagos mensuales



Costo financiado \$1,562,900.00

pago a 48 meses

Es más fácil pensar el problema como: $50 \overline{) 1,500,000}$
Estimación por números compatibles: \$30,000.00

Estrategias múltiples al resolver

El refrán "todos los caminos conducen a Roma" se aplica especialmente bien a la estimación. A menudo, una estimación puede ser obtenida de diferentes maneras, como se muestra

en el problema de la Figura 2. Cada una de estas estrategias es diferente, pero cualquiera de ellas es apropiada. El discutir y el compartir diferentes aproximaciones en el salón de clases no sólo disminuirá la visión de túnel (la noción de que las cosas sólo pueden hacerse de una manera), sino que también disminuirá el síndrome de la "única respuesta correcta".

Junto con la adquisición de una variedad de estrategias de estimación, debería venir el reconocer que varias de ellas puedan ser aplicadas al mismo problema. Si una estrategia se vuelve engorrosa o se presente improductiva, intenta otra. La estimación debe ser rápida, y si se vuelve laboriosa, una nueva estrategia debe ser aplicada. Esta flexibilidad al razonar y la disposición para intentar otro enfoque, ayuda a crear la confianza en uno mismo. No sólo es una parte importante, sino esencial para desarrollar un razonamiento matemático.

Pruebas de razonabilidad

¿Es razonable un resultado?

Esa pregunta debe ser hecha cada vez que se obtiene un resultado. Cada uno de nosotros tiene sus propias historias de horror sobre respuestas sin sentido. Ocurren tanto dentro como fuera de la escuela. A menudo, estas respuestas irracionales están ligadas a soluciones "para acabar pronto" pero no siempre. Una respuesta puede acercarse al resultado y al mismo tiempo ser irracional. Un ejemplo vívido de este fenómeno realmente me sucedió, revisando una cuenta en

una tienda de departamentos. Se vendían pelotas de tenis a \$199.00 la lata. Compré exactamente 15 latas de pelotas y ninguna otra cosa. El subtotal en la registradora (antes del impuesto) era de \$ 3 194.00 ¿Era ilógica esta respuesta? Para mí sí; pero no para el cajero. Tal vez lo más desconcertante de todo fue la forma en que el cajero manejó este conflicto. En lugar de "razonar" con los números involucrados (i. e., 15 latas a \$199

FIGURA 2

Estima este total: \$949
936
1019
1035
927
1042

REDONDEAR

$900 + 1000 + 1000 + 1000 + 900 + 1000$
son como 5800

EXTREMOS

$900 + 900 + 1000 + 1000 + 900 + 1000$
son 5700 más otro poco
o sea 5900

PROMEDIAR

Todos están alrededor de 1000
o sea $6 \times 1000 = 6000$

cada una) el cajero optó por volver a marcar todos los objetos. Este comportamiento algorítmico y la dependencia total respecto de la tecnología por parte de una persona que terminó bachillerato "exitosamente" eran decepcionantes.

¿Cómo puede uno decir si el resultado es razonable? Generalmente, se utilizan dos tipos de criterios. Uno se relaciona con el contexto del problema. La Actividad 4 provee oportunidades de revisar si las respuestas son realistas para la situación dada. Un segundo criterio a menudo requiere estimar y se relaciona con la manipulación de los números. La Actividad 5 ejemplifica una manera de practicar y desarrollar este modo de razonamiento. Fomentar revisiones rutinarias, pero no superficiales, en busca de resultados razonables debe ser un objetivo central de la instrucción matemática. Sólo a través de la enseñanza sistemática y el fomento constante, la revisión consciente en busca de resultados razonables llegará a ser parte integral del razonamiento matemático de los estudiantes.

ACTIVIDAD 4

Escoge el número más razonable:

Un guante nuevo, de béisbol, cuesta:

\$140.00 \$1 400.00 \$14 000.00

El número de estudiantes de la escuela "Benito Juárez" es:

5 50 500

La familia González (4 personas) fue a comer hamburguesas y gastó:

\$12.00 \$120.00 \$1 200.00

Escribe una cantidad razonable:

Nuestra escuela tiene más o menos _____ estudiantes.

El número promedio de personas en una familia es de _____

Alrededor de _____ personas viven en México.

ACTIVIDAD 5

¿Cuántos dígitos?

Estudia cada problema. No des respuestas exactas.

Estima cuántos dígitos deben tener las respuestas.

Problema	Número de dígitos
1. $134 + 689$	_____
2. $134 + 989$	_____
3. 12×234	_____
4. $9 \times 38 \times 19$	_____

Conclusión

El proceso de estimación, no sólo es compatible con el razonamiento matemático, sino que conduce a él. A menudo tenemos uno o dos minutos en clase antes de un descanso, almuerzo o reunión; una reserva disponible de estimaciones "relámpago" nos ayudan a aprovechar esos minutos. Vea la Figura 3. Aunque estos problemas piden una solución rápida, ofrecen una práctica en estimación y razonamiento matemático simultáneamente. Muchos otros problemas interesantes y desafiantes están disponibles, por ejemplo, ver Reys y Reys, 1983.

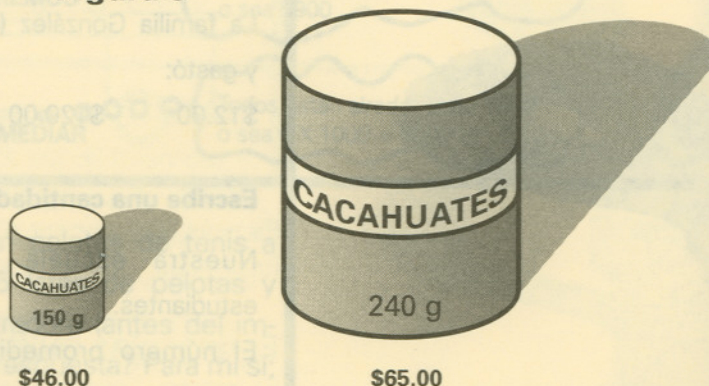
Cada componente de una estimación (decidir el tipo de respuesta requerida, escoger y llevar a cabo las estrategias apropiadas, y revisar la sensatez de la respuesta) refleja la clase de pensamiento a alto nivel, asociado con la solución de problemas y razonamiento matemático. Las habilidades estimativas son esenciales y deben tener gran prioridad dentro de cada programa escolar. Pocos tópicos matemáticos ofrecen la riqueza de beneficios, tanto a corto como a largo plazo, como lo hace la estimación.

Estimaciones "relámpago"

En una semana, las ganancias de la película *X* fueron: N\$51 165 285.00
¿Como cuánto ganó en un día?

Si cada estudiante de nuestro grupo se subiera en una báscula, ¿más o menos cuánto pesaría el grupo?

Figura 3



¿Cuál es la mejor compra?

Referencias bibliográficas

- Driscoll, Mark J. "Estimation and Mental Arithmetic". En *Research Within Reach: Elementary School*. Reston, Va.; National Council of Teachers of Mathematics, 1981. pp 107-11.
- O'Daffer, Phares. "A Case and Techniques for Estimation: Estimation Experiences in Elementary School Mathematics-Essential, Not Extra". En *Arithmetic Teacher*, 26 (February 1979), 46-51.
- Reys, Barbara J., y Reys, Robert E. *A Guide to Understanding Estimation Skills and Strategies*. Boxes 1 and 2. Palo Alto, Calif.; Dale Seymour Publications, 1983.
- Reys, Robert E., "Mental Computation and Estimation: Past, Present and Future". *Elementary School Journal*, 84 (May 1984), 547-57.
- Reys Robert E. y Bestgen, Barbara J. "Computational Estimation is a Basic Skill". En *Mathematics Education in the Eighties*. Washington, D.C.; National Education Association, 1981.
- Reys, Robert E. y Bestgen, Barbara J. "Teaching and Assessing Computational Estimation Skills". En *Elementary School Journal* 82 (November 1981), 117-28.
- Reys, Robert E., Trafton Paul R., Reys Barbara y Zawojewski. *Developing Computational Estimation Material for the Middle Grades*. Final report, No. NSF-8113601. Washington, D.C.; National Science Foundation, 1984.
- Seymour, Dale G. *Developing Skills in Estimation*. Books A and B. Palo Alto, Calif.; Dale Seymour Publications, 1981.
- Trafton, Paul R., "Estimation and Mental Arithmetic". En *Developing Computational Skills*, 1978 Yearbook of The National Council of Teachers of Mathematics, edited by Marilyn N. Syidam and Robert E. Reys, Reston, Va.; The Council, 1978.

Traducido de *Arithmetic Teacher*, february 1985, por Sergio A. Reyes.

